فصلنامه رویکردهای نوین در تحقیقات علوم پایه، فنی و مهندسی

سال پنجم، شماره ۱۷، تابستان ۱۴۰۱

ISSN: ٢٦٤٥-٥٤٣٩

www.jonarbset.ir

بررسی فضاهای تانژانت کروی با متر ساساکی

رسول کافی موسوی [۱]

[۱] عضو هیات علمی دانشگاه پیام نور

چکیده

در این مقاله روی اثر متر ساساکی بر فضاهای تانژانت کره کار خواهد شد، به این صورت که برای یک خمینه ریمانی M بعضی خواص انحنای کلاف کروی مماسی T_r M را که با متر القایی ساساکی(Sasaki Metric)تجهیز شده است بررسی می نماییم. این بررسی بازای مقادیر به اندازه کافی کوچک و به اندازه کافی بزرگ r>۰ ، شعاع کره های مماسی، صورت خواهد گرفت.

واژه‌های کلیدی: خمینه ریمانی، فضای تانژانت مماسی، کلاف کروی، متر ساساکی، الصاق لوی چیویتا، میدان برداری افقی و قائم، بالابری افقی، قائم و مماسی، انحنای مقطعی، ریچی و عددی، دو–صفحه مماسی.

۱. مقدمه

فرض کنید M خمینه هموار و همبند با بعد $n \geq ۲$ باشد، آنگاه کلاف مماسی TM روی M شامل همه زوج مرتبهای (x,u) است که x نقطه ای از M و u برداری در فضای مماسی M_x از M در نقطه x است. تابع تصویری طبیعی از TM به M را با p نمایش داده و بصورت $p(x,u) = x$ تعریف می کنیم.

فرض کنید g متری ریمانی روی خمینه M و ∇ الصاق لوی- چیویتای(Levi-Civita connection) آن باشد، آنگاه فضای مماسی $(TM)_{(x,u)}$ از TM در (x,u) با در نظر گرفتن ∇ به دو زیرفضای افقی (Horizontal) و قائم(Vertical)، $H_{(x,u)}$ و $V_{(x,u)}$ تقسیم می شود و داریم:

$$(TM)_{(x,u)} = H_{(x,u)} \oplus V_{(x,u)}$$

برای بردار $X\epsilon M_x$، بالابری افقی(Horizontal lift) X به نقطه ای مانند $(x,u)\epsilon TM$ عبارت است از بردار یکتایی مانند $X^h \epsilon H_{(x,u)}$ بطوریکه $p_* X^h = X$. بالابری قائم(Vertical lift) X به (x,u) عبارت است از بردار یکه $X^v \epsilon V_{(x,u)}$ بطوریکه برای همه توابع هموار f روی M داشته باشیم $X^v(df) = Xf$. در اینجا ۱- فرمی df را روی M بعنوان تابعی روی TM در نظر می گیریم. نگاشت $X \mapsto X^h$ ایزومورفیسمی است بین M_x و $H_{(x,u)}$ و نگاشت $X \mapsto X^v$ ایزومورفیسمی است بین M_x و $V_{(x,u)}$. بطریق ساده می توان بالابری های افقی و قائم میدانهای برداری روی M را تعریف کرد و آنها نیستند مگر میدانهای برداری روی TM که بطور یکتا تعریف می شوند.

با داشتن دستگاه مختصاتی $(x^۱, x^۲, \ldots, x^n)$ در M بطور استاندارد می توان دستگاه مختصاتی موضعی $(x^۱, x^۲, \ldots, x^n, u^۱, u^۲, \ldots, u^n)$ را روی TM تعریف کرد. میدان برداری قائم کانونی (canonical vertical vector field) روی TM عبارت است از میدان برداری U که موضعاً بصورت مختصاتی با $U = \sum_i u^i \partial/_{\partial u^i}$ تعریف می شود. در اینجا می بینیم که U به انتخاب مختصات موضعی بستگی نداشته و بصورت کلی روی TM تعریف شده است. برای بردار $u = \sum_i u^i (\partial/_{\partial x^i})_x \epsilon M_x$ می توان نوشت:

$$u^h_{(x,u)} = \sum_i u^i (\partial/_{\partial x^i})^h_{(x,u)} \quad \text{و} \quad u^v_{(x,u)} = \sum_i u^i (\partial/_{\partial x^i})^v_{(x,u)} = U_{(x,u)}$$

متر ساساکی(Sasaki) روی کلاف مماسی TM از یک خمینه ریمانی (M,g) در هر نقطه $M(x,u)\epsilon T$ با فرمول زیر محاسبه می شود:

$$\begin{cases} \bar{g}_{(x,u)}(X^h, Y^h) = g_x(X,Y) \\ \bar{g}_{(x,u)}(X^h, Y^v) = ۰ \\ \bar{g}_{(x,u)}(X^v, Y^v) = g_x(X,Y) \end{cases} \qquad (۱-۱)$$

که X, Y بردارهای دلخواهی از M_x هستند. محققاً داریم $\bar{g}_{(x,u)}(X^h, U) = g_x(X,u)$, $\bar{g}_{(x,u)}(X^h, U) = ۰$.

فرض کنید $\bar{\nabla}$ الصاق لوی- چیویتای $(TM, \bar{g})$ و X, Y میدانهای برداری روی M باشند، آنگاه در هر نقطه ثابت $(x,u)\epsilon TM$ داریم:

$$(۲-۱) \qquad \begin{cases} (\bar{\nabla}_{X^h} Y^h)_{(x,u)} = (\nabla_X Y)^h_{(x,u)} - \frac{۱}{۲}(R_x(X,Y)u)^v, \\ (\bar{\nabla}_{X^h} Y^v)_{(x,u)} = \frac{۱}{۲}(R_x(u,Y)X)^h + (\nabla_X Y)^v_{(x,u)}, \\ (\bar{\nabla}_{X^v} Y^h)_{(x,u)} = \frac{۱}{۲}(R_x(u,X)Y)^h, \\ (\bar{\nabla}_{X^v} Y^v)_{(x,u)} = ۰, \end{cases}$$

که R تانسور انحنای ریمانی (M,g) است و بصورت $R(X,Y) = [\nabla_X, \nabla_Y] - \nabla_{[X,Y]}$ تعریف می شود. برای میدان برداری قائم کانونی U داریم:

$$\begin{cases} \bar{\nabla}_{X^h}U = 0\ ,\ \bar{\nabla}_{X^v}U = X^v \\ \bar{\nabla}_U Y^h = 0\ ,\ \bar{\nabla}_U X^v = 0 \\ \bar{\nabla}_U U = U \end{cases} \tag{۱-۳}$$

برای هر میدان برداری X روی M.

فرض کنید r عددی مثبت باشد، آنگاه کلاف کروی مماسی با شعاع r روی خمینه ریمانی (M,g) عبارت است از رویه فوقانی (hypersuface) $T_rM = \{(x,u)\epsilon TM: g_x(u,u) = r^2\}$. در $(TM,\bar{g})$ میدان برداری قائم کانونی U در هر نقطه $(x,u)\epsilon T_rM$ بر T_rM عمود است. همچنین در طول T_rM داریم $\bar{g}(U,U) = r^2$. برای هر میدان برداری مماس بر M مانند X، بالابری افقی X^h در هر نقطه $(x,u)\epsilon T_rM$ همیشه بر T_rM مماس است، در حالی که در حالت کلی بالابری قائم X^v در نقطه (x,u) بر T_rM مماس نیست. بالابری مماسی X (Tangential lift) عبارت است از میدان برداری X^t مماس بر T_rM که بصورت زیر تعریف می شود:

$$X^t = X^v - {}^1/_{r^2}\,\bar{g}(X^v,U)U$$

بنابراین در هر نقطه $(x,u)\epsilon T_rM$ داریم:

$$X^t_{(x,u)} = X^v_{(x,u)} - {}^1/_{r^2}\,g_x(X,u)U_{(x,u)}$$

حال متری که به رویه فوقانی $T_rM \subseteq (TM,\bar{g})$ داده و با $\tilde{g}$ نمایش می دهیم متر ریمانی القایی است که بصورت یکتا با فرمولهای زیر محاسبه می شود:

$$\begin{cases} \tilde{g}(X^h,Y^h) = \bar{g}(X^h,Y^h), \\ \tilde{g}(X^h,Y^t) = 0, \\ \tilde{g}(X^t,Y^t) = \bar{g}(X^v,Y^v) - {}^1/_{r^2}\,\bar{g}(X^v,U)\bar{g}(Y^v,U), \end{cases} \tag{۴-۱}$$

که X,Y میدانهای برداری دلخواه روی M هستند.

در زیر از نماد $\langle .,. \rangle$ برای ضرب اسکالر g_x روی M_x استفاده می کنیم، لذا (۴-۱) را می توان در هر نقطه ثابت $(x,u)\epsilon T_rM$ بصورت زیر بازنویسی نمود:

$$\begin{cases} \tilde{g}_{(x,u)}(X^h,Y^h) = \langle X,Y \rangle, \\ \tilde{g}_{(x,u)}(X^h,Y^t) = 0, \\ \tilde{g}_{(x,u)}(X^t,Y^t) = \langle X,Y \rangle - \frac{1}{r^2}\langle X,u \rangle\langle Y,u \rangle, \end{cases} \tag{۵-۱}$$

که X,Y میدانهای برداری دلخواه از M_x هستند.

ذکر این نکته لازم است که برای $(x,u)\epsilon T_rM$، $u^t_{(x,u)} = 0$ و بنابراین فضای مماس $(T_rM)_{(x,u)}$ را می توان همزمان بصورت مجموعه $\{X^h + Y^t: X\epsilon M_x, Y\epsilon\{u\}^\perp \subseteq M_x\}$ بیان کرد.

واضح است که هر دو- صفحه مماسی $\tilde{P} \subseteq (T_rM)_{(x,u)}$ با پایه متعامدی به شکل $\{X_1^h + Y_1^t, X_2^h + Y_2^t\}$ تولید می شود. برای چنین پایه ای داریم: $\|X_i\|^2 + \|Y_i\|^2 = 1\ , i = 1,2$ و $\langle X_1,X_2 \rangle + \langle Y_1,Y_2 \rangle = 0$. بعلاوه می توانیم فرض کنیم $\langle X_1,X_2 \rangle = \langle Y_1,Y_2 \rangle = 0$. این مطلب را براحتی می توان با جایگزینی مناسب پایه داده شده متوجه شد. طبق معمول Y_1,Y_2 عمود بر u فرض شده اند. از فرمولهایی که برای عملگر انحنا بدست آمد (همانطور که در مرجع [۱۸] انجام شده است) می توان فرمولهای زیر را برای انحنای مقطعی دو-صفحه $\tilde{P}$ بدست آورد:

$$\begin{aligned} \tilde{K}(\tilde{P}) = {} & \langle R_x(X_1,X_2)X_2,X_1 \rangle + 3\langle \widetilde{R_x(X_1,X_2)Y_2,Y_1} \rangle + \frac{1}{r^2}\|Y_1\|^2\|Y_2\|^2 - \frac{3}{4}\|R_x(X_1,X_2)u\|^2 + \\ & \frac{1}{4}\|R_x(u,Y_2)X_1\|^2 + \frac{1}{4}\|R_x(u,Y_1)X_2\|^2 + \frac{1}{2}\langle R_x(u,Y_1)X_2, R_x(u,Y_2)X_1 \rangle - \\ & \langle R_x(u,Y_1)X_1, R_x(u,Y_2)X_2 \rangle + \langle (\nabla_{X_1}R)_x(u,Y_2)X_2,X_1 \rangle + \langle (\nabla_{X_2}R)_x(u,Y_1)X_1,X_2 \rangle. \end{aligned}$$

(۱-۶)

حال زوجهای متعامد $\{\widehat{X}_1,\widehat{X}_2\}$ و $\{\widehat{Y}_1,\widehat{Y}_2\}$ و زوایای $\alpha,\beta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ وجود دارند بطوریکه:

$$\begin{cases} X_1=\cos\alpha\,\widehat{X}_1 \quad , \quad Y_1=\sin\alpha\ \widehat{Y}_1 \\ X_2=\cos\beta\,\widehat{X}_2 \quad , \quad Y_2=\sin\beta\ \widehat{Y}_2 \end{cases}$$

همچنین قرار می دهیم $\hat{u}=\frac{u}{\|u\|}=\frac{u}{r}$. این نماد متعاقباً استفاده خواهد شد.

۲-انحنای مقطعی (sectional Curvature)

در این قسمت انحنای مقطعی، علامت آن و کمی تعمیم آن را مورد بررسی و مطالعه قرار می دهیم:

قضیه۱-۲[۱۸]: فرض کنید (M,g) دارای یکی از دو خاصیت متقارن موضعی با انحنای مقطعی مثبت، یا موضعاً تخت باشد و $n=\dim M\geq 2$، آنگاه برای هر $r\geq 0$ به اندازه کافی کوچک، کلاف کروی مماسی $(T_rM,\tilde{g})$ فضایی با انحنای مقطعی نامنفی است.

اثبات: همانطوری که در فوق بیان شد، ابتدا پایه متعامد $\{X_1^h+Y_1^t,X_2^h+Y_2^t\}=\{X_1^h+Y_1^v,X_2^h+Y_2^v\}$ را در نقطه $(x,u)\epsilon T_rM$ برای دو- صفحه مماسی $\widetilde{P}$ از T_rM انتخاب می کنیم، آنگاه زوجهای متعامد $\{\widehat{X}_1,\widehat{X}_2\}$ و $\{\widehat{Y}_1,\widehat{Y}_2\}$ و زوایای $\alpha,\beta\epsilon\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ وجود دارند بطوریکه:

$$\begin{cases} X_1=\cos\alpha\,\widehat{X}_1 \quad , \quad Y_1=\sin\alpha\,\widehat{Y}_1 \\ X_2=\cos\beta\,\widehat{X}_2 \quad , \quad Y_2=\sin\beta\,\widehat{Y}_2 \end{cases}$$

همچنین اعداد مثبت L_1 و L_2 وجود دارند بطوریکه:

$$\left|\langle R_x(\widehat{X}_1,\widehat{X}_2)\widehat{Y}_2,\widehat{Y}_1\rangle\right|<L_1 \quad \text{و} \quad \left|\langle R_x(\widehat{Z},\widehat{Y}_1)\widehat{X}_1,R_x(\widehat{Z},\widehat{Y}_2)\widehat{X}_2\rangle\right|<L_2$$

برای $r>0$ به اندازه کافی کوچک می توان (۶-۱) را بصورت زیر تخمین زد:

$$\widetilde{K}(\widetilde{P})\geq\left(\varepsilon A-\frac{B}{r}\right)^2+AB\left(\frac{\varepsilon}{r}-L\right)$$

که $A=\cos\alpha.\cos\beta$ و $B=\sin\alpha.\sin\beta$ و $L={}^{3(2L_1+L_2)}\!/_{4}$ و ε مقدار ثابت مثبت است. طرف راست نامعادله فوق برای همه مقادیر مثبت و به اندازه کافی کوچک r مثبت می شود.////

این نتیجه با نتایجی که باریسنکو(A.A. Borisenko) و یامپولسکی(A.L. Yampolski) -مراجع[۱۱]،[۱۲]،[۲۸]و[۲۹]- بدست آورده اند بسیار نزدیک است. ادعا شده بود که برای اولین بار در مرجع [۱۳] رابطه هم ارزی آن با استفاده از معیار خاصی اثبات شده است -مراجع [۱۱]،[۱۲]،قضیه۱]و[۱۳]،قضیه۳,۶]- در حالی که این اثبات بطور کامل هنوز صورت نگرفته است. اثبات ما کاملتر و متفاوت با اثباتی است که باریسنکو و یامپولسکی داده اند. همانطور که می دانیم هر فضای موضعاً متقارن با انحنای مقطعی اکیداً مثبت بطور موضعی با فضای فشرده متقارنی که دارای رتبه ۱ می باشد ایزومتر است. این مطلب رابطه بین قضیه ۱-۱ و نتایج مرجع [۱۳،صفحه۷۹] را بیان می کند.

قضیه۲-۲ [۲۰]: فرض کنید (M,g) یک فضای ریمانی $n-$بعدی موضعاً متقارن با انحنای مقطعی نامنفی باشد و $n\geq 3$، آنگاه برای هر $r>0$ به اندازه کافی کوچک، کلاف کروی مماسی $(T_rM,\tilde{g})$ نیز فضایی با انحنای مقطعی نامنفی است.

اثبات: چون (M,g) با فضای تماماً متقارن ایزومتر است و در فرض قضیه موضعی مطرح شده است می توانیم فرض کنیم (M,g)تماماً متقارن و همبند ساده است. بنابراین می توانیم تجزیه رام (Rahm) را داشته باشیم:

$$(M,g)=(M_0,g_0)\times(M_1,g_1)\times\ldots\times(M_s,g_s)$$

که (M_0,g_0) قسمت اقلیدسی و تمامی (M_i,g_i)، $i=1,2,\ldots,s$ فضاهای متقارن تجزیه ناپذیر فشرده هستند. نقطه $x=(x_0,x_1,\ldots,x_s)$ را در نظر بگیرید و قرار دهید $N_i=M_i\times\{(x_0,\ldots,\hat{x}_i,\ldots,x_s)\}$ و $i=0,1,\ldots,s$ است که N_i ورقه ای از M است. دقت کنید که علامت $\hat{x}_i$ نشان دهنده این است که مؤلفه x_i حذف شده

است و U, V و W بردارهای مماسی بر ورقه های N_i در x هستند و اگر حداقل دو تای آنها مماس به ورقه های مختلف باشند آنگاه $R_x(U,V)W = ۰$. همچنین دقت کنید که اگر W مماس بر تعدادی از N_i ها ، $i = ۱,۲,\dots,s$ باشند آنگاه برای هر کدام از بردارهای مماس U, V در x ، بردار $R_x(U,V)W$ یا برداری پوچ است یا بر ورقه N_i نیز مماس است. سرانجام دقت کنید که فضاهای مماس بر ورقه ها تشکیل تجزیه ای متعامد از فضای مماسی M_x می دهند. حال زوج متعامد $\{\widehat{X}_۱,\widehat{X}_۲\}$ در M_x را در نظر بگیرید. اگر هر دو $\widehat{X}_۱,\widehat{X}_۲$ بر N. مماس باشند آنگاه از فرمول (۶-۱) نتیجه می گیریم که $\widetilde{K}(\widetilde{P}) \geq ۰$ ، برای هر دو- صفحه $\widetilde{P}$. اگر $\widehat{X}_۱,\widehat{X}_۲$ مماس بر یکی از فاکتورهای N_i، $i = ۱,۲,\dots,s$ باشند آنگاه داریم $K(\widehat{X}_۱ \wedge \widehat{X}_۲) \geq \delta_i > ۰$ که δ_i کمترین مقدار انحنای مقطعی روی (M_i, g_i) است. حال مانند اثبات قضیه ۱-۲ نشان داده می شود که $\widetilde{K}(\widetilde{P}) \geq ۰$ ، برای هر انتخاب سه تایی متعامد $\{\widehat{Y}_۱,\widehat{Y}_۲,\widehat{u}\}$ در M_x و برای هر شعاع $r > ۰$ که $r \leq r_i$ و $r_i > ۰$ فقط بستگی به هندسه (M,g) دارد. درنهایت فرض کنید $\widehat{X}_۱,\widehat{X}_۲$ بر دو ورقه مجزای N_i و N_j که $i \neq j$ مماس باشند، آنگاه $R_x(\widehat{X}_۱,\widehat{X}_۲) = ۰$. بعلاوه بازای هر انتخاب $U,V \in M_x$، $R_x(U,V)X_۱$ و $R_x(U,V)X_۲$ به ترتیب بر ورقه های N_i و N_j مماس هستند بنابراین برای هر انتخاب سه تایی متعامد $\{\widehat{Y}_۱,\widehat{Y}_۲,\widehat{U}\}$ در M_x سمت راست فرمول (۶-۱) به سه قسمت تقسیم می شود که همگی نامنفی هستند و این اثبات را کامل می کند.////

با داشتن فرض قضیه ۲-۲ و با توجه به فرض قضیه ۹-۲ (که بعداً بیان می شود) می توان براحتی دید که $(T_rM,\tilde{g})$ هرگز فضایی با انحنای مقطعی اکیداً مثبت نیست، به عبارت دیگر اگر (M,g) یک کره دو بعدی استاندارد باشد آنگاه با توجه به ملاکی که توسط یامپولسکی در مرجع [۲۸] بیان شده است $(T_rM,\tilde{g})$ فضایی با انحنای مقطعی مثبت است.

سؤالی که بطور طبیعی به ذهن می رسد این است که آیا استنتاج قضیه ۲-۲ برای خمینه های ریمانی که موضعاً متقارن نیستند صادق است؟ راه حل قطعی برای این سؤال یافت نشده است ولی بعضی یافته های جدید بیان می دارند که معکوس قضیه ۲-۲ می تواند برقرار باشد. اولین قدم برای رسیدن به این هدف را در قضیه زیر برمی داریم:

قضیه ۳-۲ [۱۸]: برآمدگی های کوچک دلخواه بصورت سرپوشهای کروی برای ۴-کره استاندارد با این خواص وجود دارند که اگر (M,g) چنین برآمدگی هایی باشند آنگاه برای هر $r > ۰$ ، $(T_rM,\tilde{g})$ انحنای مقطعی منفی بخود می گیرد.

اثبات: فرض کنید $B \subseteq \mathbb{R}^۴[u^۱,\dots,u^۴]$ گوی باز به مرکز مبدا O و شعاع $۱ - \varepsilon$ باشد که ε عدد مثبت کوچکی است. نگاشت $\phi: B \to \mathbb{R}^۵$ را که با فرمول زیر داده می شود در نظر بگیرید:

$$\phi(u) = \left(u^۱,u^۲,u^۳,u^۴,\sqrt{۱ - \sum_{i=۱}^{۴}(u^i)^۲ - F(u)}\right)$$

که $F(u) = \varepsilon_۱ u^۲u^۴ + \varepsilon_۲ (u^۱)^۲ u^۳$ (*). بوضوح اگر $\varepsilon_۱ > ۰$ و $\varepsilon_۲ > ۰$ به اندازه کافی کوچک باشند آنگاه $M = \phi(B)$ خوش تعریف است،به علاوه $M \subseteq \mathbb{R}^۵$ را که با متر ریمانی القایی g در نظر گرفته شود می توان به عنوان برآمدگی کوچکی از یک سر پوش کروی ۴-بعدی در نظر گرفت. واضح است که اگر $\varepsilon_۱$ و $\varepsilon_۲$ به اندازه کافی کوچک انتخاب شوند آنگاه انحنای مقطعی (M,g) در همه جا مثبت است در حالی که حتی در مبدا $\phi(۰)$ اگر $\varepsilon_۱ \neq ۰$ آنگاه انحنای مقطعی ثابت نیست-بعداً بررسی می شود.

فرض کنید Z_i بر مماس مختصاتی $(\frac{\partial\phi}{\partial u^i})$ در مبدا $\phi(۰) \in M$ برای $i = ۱,۲,۳,۴$ باشد. می توان دید که $\{Z_۱,\dots,Z_۴\}$ پایه ای متعامد است. برای عملگر شکلی نظیر آن در $\phi(۰)$ بدست می آوریم:

$$(**)\quad SZ_۱ = -Z_۱ \quad ,SZ_۲ = -Z_۲ - \tfrac{۱}{۲}\varepsilon_۱ Z_۴ \quad ,SZ_۳ = -Z_۳ \quad ,SZ_۴ = -\tfrac{۱}{۲}\varepsilon_۱ Z_۲ - Z_۴$$

به علاوه برای هر تابع برآمدگی F که همه مشتقات اول آن صفر می شوند داریم:

$$\langle(\nabla_{Z_۱}R)(Z_۳,Z_۴)Z_۲,Z_۱\rangle = \frac{۱}{۴}[F''_{۱۳}(۰)F'''_{۲۲۴}(۰) - F''_{۱۴}(۰)F'''_{۲۲۳}(۰) - F''_{۲۳}(۰)F'''_{۱۱۴}(۰) + F''_{۲۴}(۰)F'''_{۱۱۳}]$$

که $F''_{ij} = \frac{\partial^2 F}{\partial u^i \partial u^j}$ و $F'''_{ijk} = \frac{\partial^3 F}{\partial u^i \partial u^j \partial u^k}$ و $i,j,k = 1,\dots,4$ برای انتخاب خاصی از F ، همانطور که در $(*)$ بیان شد بدست می آوریم:

$$\langle (\nabla_{Z_1} R)(Z_3, Z_4) Z_2, Z_1 \rangle = \frac{1}{2}\varepsilon_1\varepsilon_2 \qquad (***)$$

این فرمول ساده انتخاب ما را در مورد F توجیه می کند.

حال بر می گردیم به فرمول (۶-۱) و در آن قرار می دهیم $(x,u) = (\phi(0), rZ_3)$ و

$$X_1 = Z_1,\ \ Y_1 = 0,\ \ X_2 = \cos\beta\ Z_2,\ \ Y_2 = -\sin\beta\, Z_4.$$

با استفاده از معادله گاوس و قراردادهای فوق و فرمول $(**)$ بدست می آوریم:

$$\langle R(X_1,X_2)X_2,X_1\rangle = \cos^2\beta \ \ , R(X_1,X_2)u = R(u,Y_2)X_1 = 0$$

حال با استفاده از فرمول $(***)$ و معادله بدست آمده در فوق برای دو- صفحه مماس نظیر داریم:

$$\widetilde{K}(\widetilde{P}) = \cos^2\beta - \frac{1}{2} r\varepsilon_1\varepsilon_2 \cos\beta\sin\beta = \cos\beta\,(\cos\beta - \frac{1}{2} r\varepsilon_1\varepsilon_2 \sin\beta)$$

حال اگر اعداد مثبت $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ و نیز عدد مثبت و دلخواه r را که مربوط به کلاف کروی مماسی T_rM می باشد ثابت فرض کنیم آنگاه مقدار $\widetilde{K}(\widetilde{P})$ در فوق برای $\beta\epsilon(0,\frac{\pi}{2})$ وقتی که β به $\frac{\pi}{2}$ میل می کند منفی می شود.////

برای بیان شکل کلی و جبری قضیه ۳-۲ ابتدا لم زیر را اثبات می کنیم:

لم۴-۲ [۲۰]: فرض کنید x نقطه ثابتی از خمینه ریمانی (M,g) باشد، آنگاه پایه متعامدی از M_x مانند سه تایی $\{X,Y,Z\}$ وجود دارد بطوریکه $\langle (\nabla_X R)_x(X,Y)Y,Z\rangle \neq 0$ یا $(\nabla R)_x = 0$.

اثبات: ابتدا برای اختصار عبارت $\langle (\nabla_X R)_x(Y,Z)U,V\rangle$ را با $B(Y,Z,U,V;X)$ نشان می دهیم. برای هر سه تایی متعامد $\{X,Y,Z\}$ فرض می کنیم $B(X,Y,Y,Z;X) = 0$ ، آنگاه با بکار بردن اتحاد دوم بیانچی برای سه مؤلفه آخر و برای هر سه تایی متعامد $\{X,Y,Z\}$ داریم:

$$B(X,Y,Y,X;Z) = 0 \qquad (*)$$

بعلاوه برای هر چهارتایی متعامد $\{X,Y,Z,U\}$ بدست می آوریم:

$$B(X,Y,U,Z;X) = 0 \qquad (**)$$

در حقیقت داریم $B(X,Y+U,Y+U,Z;X) = 0$. همچنین چون $B(X,Y,Y,Z;X) = 0$ و $B(X,U,U,Z;X) = 0$ بدست می آوریم $B(X,Y,U,Z;X) + B(X,U,Y,Z;X) = 0$. اگر اتحاد اول بیانچی را در قسمت دوم معادله اخیر و برای سه مؤلفه اول بکار بریم به لحاظ تقارنهای استاندارد B داریم:

$$2B(X,Y,U,Z;X) = B(U,Y,X,Z;X) \quad (***)$$

با جابجا کردن Z و Y به لحاظ تقارن B داریم:

$$2B(U,Y,X,Z;X) = B(X,Y,U,Z;X)$$

بنابراین از $(***)$ بدست می آوریم:

$$B(U,Y,X,Z;X) = B(X,Y,U,Z;X) = 0$$

که با $(**)$ هم ارز است. حال از $(*)$ بدست می آوریم $B(X,Y+U,Y+U,X;Z) = 0$ و سرانجام به لحاظ تقارنهای استاندارد B برای هر چهارتایی متعامد $\{X,Y,Z,U\}$ بدست می آوریم $B(X,Y,U,X;Z) = 0$. حال پنج تایی متعامد $\{X,Y,Z,U,V\}$ را در نظر بگیرید. ابتدا با استفاده از $(**)$ داریم $B(X+V,U,Y,Z;X+V) = 0$ و بنابراین:

$$B(X,U,Y,Z;V) + B(V,U,Y,Z;X) = 0$$

که می توان بصورت زیر بازنویسی نمود:

$$B(X,U,Y,Z;V) + B(Y,Z,V,U;X) = 0$$

با بکار بردن اتحاد دوم بیانچی برای قسمت دوم معادله فوق بدست می آوریم:

$$2\square(X,U,Y,Z;V) = B(Y,Z,X,V;U)$$

حال با جابجایی U و V به تساوی زیر می رسیم:

$$2\square(X,V,Y,Z;U) = B(Y,Z,X,U;V)$$

و از دو معادله اخیر فوق داریم:

$$B(X,V,Y,Z;U) = B(Y,Z,X,U;V) = 0$$

و در نهایت برای هر پنج تایی متعامد $\{X,Y,Z,U,V\}$ بدست می آوریم:

$$B(X,Y,Z,U;V) = 0$$

در اینجا باقی میماند که برای هر زوج متعامد $\{X,Y\}$ نشان دهیم $B(X,Y,X,Y;X) = 0$ ، ابتدا با استفاده از $(*)$ برای هر سه تایی متعامد $\{X,Y,U\}$ و برای هر α داریم:

$$B(\sin\alpha.X + \cos\alpha.U, Y, \sin\alpha.X + \cos\alpha.U, Y; \cos\alpha.X - \sin\alpha.U) = 0$$

که با توجه به معادله $(*)$ و معادله قبل از آن بدست می آوریم:

$$\cos\alpha.\sin^2\alpha.B(X,Y,X,Y;X) - \cos^2\alpha.\sin\alpha.B(U,Y,U,Y;U) = 0$$

و از معادله فوق مطلوب ما حاصل است.

یافته های فوق نشان می دهد B تانسور پوچ است.////

حال با استفاده از لم فوق می توان قضیه زیر را بیان کرد:

قضیه ۵-۲ [۲۰]: فرض کنید (M,g) خمینه ریمانی $n-$ بعدی باشد که $n \geq 3$ و x نقطه ای کروی روی M باشد- به این معنی که تمامی انحناهای موضعی در x ثابت باشند. بعلاوه فرض کنید مشتق کوواریان $(\nabla R)_x$ از تانسور انحنای ریمانی R غیر صفر باشد، آنگاه برای هر $r > 0$ برداری مانند $u \epsilon M_x$ که $\|u\|=r$ وجود دارد بطوریکه فضای مماسی $(T_rM)_{(x,u)}$ شامل یک دو- صفحه با انحنای مقطعی منفی است.

اثبات: چون $(\nabla R)_x$ غیر صفر است آنگاه با توجه به لم ۴-۲ سه تایی متعامد $\{Z_1,Z_2,Z_3\}$ در فضای مماسی M_x وجود دارد بطوریکه $b = \langle(\nabla_{Z_1}R)_x(Z_2,Z_3)Z_2,Z_1\rangle > 0$ قرار دهید.

$$X_1 = Z_1\,, Y_1 = 0\,, X_2 = \cos\beta\, Z_2\,, Y_2 = -\sin\beta\, Z_3\,, u = rZ_3$$

که $r > 0$ و $\beta \epsilon (0, \pi/2)$. بعلاوه قرار دهید $c = K(Z_1 \wedge Z_2) > 0$. سرانجام فرض کنید $\widetilde{P}$ دو- صفحه مماسی باشد که بوسیله X_1^h و $X_2^h + Y_2^t$ در $(T_rM)_{(x,u)}$ تولید شده باشد. چون $x \epsilon M$ یک نقطه کروی است، آنگاه $R_x(u,Y_2)X_1 = 0$ و $\|R_x(X_1,X_2)u\| = cr\cos\beta$، بنابراین از (۶-۱) بدست می آوریم:

$$\widetilde{K}(\widetilde{P}) = \cos\beta\,(c\cos\beta - \frac{3}{4}c^2r^2\cos\beta - br\sin\beta)$$

که برای $\beta \epsilon (0, \pi/2)$ وقتی β به $\pi/2$ میل می کند، $\widetilde{K}(\widetilde{P})$ منفی می شود.////

نتیجه ۶-۲ [۲۰]: فرض کنید (M,g) خمینه ای ریمانی باشد بطوریکه مشتق کوواریان ∇R از تانسور انحنای ریمانی R در همه جا غیر صفر باشد. اگر برای بعضی مقادیر مثبت r ، کلاف کروی مماسی $(T_rM,\tilde{g})$ دارای انحنای مقطعی نامنفی باشد آنگاه (M,g) هیچ نقطه کروی ندارد.

به استثنای حالت $\dim M = 8$ ما همچنین اثبات کردیم که کلافهای کروی مماسی هرگز فضاهای با انحنای اکیداً مثبت نیستند. حال بحث را با گزاره زیر ادامه می دهیم:

گزاره ۷-۲ [۲۱،۲۹]: فرض کنید (M,g) خمینه ریمانی $n-$ بعدی باشد بطوریکه $n \geq 3$ و $n \neq 4,8$. آنگاه در هر نقطه $x \in M$ بردارهای یکه X,Y و Z در فضای مماسی M_x وجود دارند بطوریکه $\langle X,Y\rangle=0$ و $R_x(X,Y)Z = 0$.

اثبات: فرض کنید نقطه $x \in M$ وجود داشته باشد بطوری که شرط $R_x(X,Y)Z \neq ۰$ برای هر سه تایی $\{X,Y,Z\}$ از بردارهای یکه ای که دارای شرط $\langle X,Y\rangle = ۰$ می باشند برقرار باشد. فرض کنید $\{E_۱, E_۲, \dots, E_n\}$ پایه ای متعامد از $(M_x, \langle .,. \rangle)$ باشد، آنگاه بردار $(v_i)_Z = T_Z(R_x(E_i,E_n)Z) \neq ۰$ همیشه در نقطه انتهایی، Z بر کره واحد $S_x \subseteq M_x$ مماس است، که $T_Z: M_x \to (TM)_Z$ یک ایزومورفیسم کانونی است و بصورت زیر مشخص می شود:

$$T_Z(W) = \frac{d}{dt}\Big|_{.}(Z+tW)\ ;\ \ \forall\, W \epsilon M_x$$

حال می بینیم که میدانهای برداری $v_۱, v_۲, \dots, v_{n-۱}$ روی کره S_x مستقل خطی هستند. بنابراین S_x توازی پذیر است، لذا با استفاده از قضیه معروف آدامز(J.F. Adams- مرجع[۲]) می بینیم که $n = ۲,۴,۸$. ////

گزاره۸-۲ [۲۱]: اگر $n = ۴$ و بعلاوه (M,g) فضایی با انحنای مقطعی مثبت باشد آنگاه استنتاج گزاره ۷-۲ هنوز برقرار است.

اثبات: وجود حداقل یک جواب برای معادله $R_x(X,Y)Z = ۰$ را ثابت می کنیم، بطوریکه $X \wedge Y \neq ۰$ و $Z \neq ۰$. با استفاده از پایه معروف به پایه چرن(Chern) در فضای مماس، تعداد مؤلفه های انحنا را کاهش می دهیم و نشان می دهیم که خاصیت مطلوب از این حقیقت تبعیت می کند که یک چندجمله ای درجه دوم همگن خاص با سه متغیر (که ضرایب آن توابعی از مؤلفه های انحنا هستند) مثبت معین یا منفی معین نیست.در اینجا بحث دقیقی در مورد چند حالت باید انجام شده و مثبت بودن انحنای مقطعی (M,g) و نیز پیوستگی بحث باید به کار رود.////

شرط انحنای مقطعی مثبت را در گزاره ۸-۲ نمی توان حذف کرد. ایوانو(S. Ivanov) و پتروو(I. Petrova) در مرجع [۱۵] در بین فضاهایی که انحنای آن با تغییر علامت تغییر می کند مثالی یافتند که در آن برای معادله $R_x(X,Y)Z = ۰$ جواب غیربدیهی وجود ندارد.

قضیه ۹-۲ [۲۱]: فرض کنید $(T_rM, \tilde{g})$ کلاف کروی مماسی $n-$ بعدی باشد که $n \geq ۳$ و $n \neq ۸$ ، آنگاه $(T_rM, \tilde{g})$ هرگز فضایی با انحنای مقطعی مثبت نیست.

اثبات: فرض کنید $(T_rM, \tilde{g})$ با مقدار دلخواه اما ثابت $r > ۰$ دارای انحنای مقطعی مثبت $\tilde{K}(\tilde{P})$ باشد. با قرار دادن $Y_۱ = Y_۲ = ۰$ در فرمول (۶-۱) می بینیم که (M,g) فضایی با انحنای مقطعی مثبت می باشد، لذا با توجه به دو گزاره فوق بردارهای یکه $X,Y,Z \epsilon M_x$ وجود دارند بطوریکه $\langle X,Y\rangle = ۰$ و $R_x(X,Y)Z = ۰$. از فرمول کلی (۶-۱) که در آن فرض می کنیم $X = u$ بدست می آوریم $\tilde{K}(\mathrm{span}\{Y^t, Z^h\}) = ۰$ که یک تناقض است.////

در اینجا یک مسئله باز باقی می ماند و آن اینکه آیا قضیه ۹-۲ و گزاره ۷-۲ در حالت $n = ۸$ برقرار هستند یا خیر. نتیجه زیر نشان می دهد که استنتاج قضیه ۲-۲ بهترین امکان برای $n \geq ۳$ است:

قضیه ۱۰-۲ [۲۱]: فرض کنید $(T_rM, \tilde{g})$ کلاف کروی مماسی روی خمینه ریمانی موضعاً متقارن $n-$ بعدی (M,g) باشد که r مثبت و دلخواه و $n \geq ۳$ ، آنگاه $(T_rM, \tilde{g})$فضای با انحنای مقطعی مثبت نیست.

اثبات: اگر $n = ۳$ آنگاه با استفاده از قضیه ۹-۲ نتیجه حاصل است(یا با اثباتی ساده و سرراست به نتیجه خواهیم رسید).

فرض کنید $n \geq ۴$، ضمن یادآوری قضیه ای که توسط والف(J.A. Wolf) در مرجع [۲۷،قضیه۱] بیان شده است می بینیم که فضای متقارن $N \subseteq M$ با رتبه ۱ و فشرده وجود دارد که یک زیرخمینه کلاً ژئودزیک با بعد ۴ می باشد. حال گزاره ۸-۲ برای N برقرار است و بنابراین برای M نیز برقرار است. بقیه اثبات مانند اثبات قضیه ۹-۲ است.////

حال برای نگاهی به معکوس قضیه ۲-۲ ابتدا گزاره زیر را بیان می کنیم:

گزاره۱۱-۲ [۲۰]: فرض کنید (M,g) خمینه ریمانی $n-$ بعدی با انحنای مقطعی نامنفی بوده و $n \geq ۳$، همچنین فرض کنید $x \epsilon M$ نقطه ای باشد که مشتق کوواریان $(\nabla R)_x$ از تانسور انحنای ریمانی R غیر صفر باشد، آنگاه برای هر عدد به اندازه کافی بزرگ $r > ۰$ ، بردار $u \epsilon M_x$ که $r\|u\|=$ وجود دارد بطوریکه فضای مماسی $(T_rM)_{(x,u)}$ شامل یک دو- صفحه با انحنای مقطعی منفی است.

اثبات: می نویسیم $(Z_1,Z_2)Z_2 = cZ_1 + WR_x$ که $W \in M_x$ بر Z_1 عمود است، لذا با فرض $C = \|R_x(Z_1,Z_2)Z_2\|$ داریم $C \geq c > 0$. حال قرار دهید $D = \|R_x(Z_2,Z_2)Z_1\| \geq 0$. با استفاده از (۶-۱) برای دو- صفحه $\widetilde{P}$ مانند اثبات قضیه ۵-۲ بدست می آوریم:

$$\widetilde{K}(\widetilde{P}) = r\sin\beta\left(\frac{1}{4}rD^2\sin\beta - b\cos\beta\right) + \cos^2\beta\left(c - \frac{3}{4}C^2r^2\right).$$

وقتی $C = 0$ قسمت دوم عبارت فوق بازای هر $r > 0$ برابر صفر است و اگر $C > 0$ برای هر $r \geq {}^{2\sqrt{c}}/_{(\sqrt{3}C)}$ نامثبت است. حال عدد $r > 0$ را طوری انتخاب می کنیم که قسمت دوم عبارت فوق نامثبت شود، آنگاه قسمت اول برای هر $\beta\epsilon(0,{}^{\pi}/_{2})$ که $\cot\beta > {}^{rD^2}/_{4\square}$ منفی است، لذا یک دو-صفحه در $(x,u)\epsilon T_rM$ با انحنای مقطعی منفی وجود دارد.////

حال می توان گفت قضیه زیر تا حدی معکوس قضیه ۲-۱ است:

قضیه ۱۲-۲ [۲۰]: فرض کنید (M,g) خمینه ریمانی $n-$ بعدی، $n \geq 3$ باشد بطوریکه برای هر شعاع r به اندازه کافی بزرگ، کلافهای کروی مماسی $(T_rM,\tilde{g})$ روی (M,g) فضاهایی با انحنای مقطعی نامنفی باشند، آنگاه فضای (M,g) موضعاً متقارن است.

اثبات: [۲۰] قضیه ۵ .

در باقیمانده این بخش فرض می کنیم که تانسور ویل نظیر (Conformal Weyl Tensor) صفر می شود. این فرض ایجاب می کند که $\dim M = 3$ یا $\dim M > 3$ و (M,g) متناظراً تخت باشد.

لم۱۳-۲ [۲۰]: فرض کنید (M,g) که $\dim M \geq 3$ یک خمینه ریمانی باشد بطوریکه تانسور ویل نظیر آن صفر شود. همچنین فرض کنید $\{E_1,E_2,\ldots,E_n\}$ پایه ای برای M_x باشد بطوریکه تانسور ریچی Ric_x را قطری کند، آنگاه برای هر سه تایی از اندیسهای مجزای $\{i,j,k\}$، $R_x(E_i,E_j)E_k = 0$.

لم۱۴-۲ [۲۰]: فرض کنید x یک نقطه ثابت خمینه ریمانی (M,g)، $\dim M \geq 3$ باشد بطوریکه W، تانسور ویل نظیر آن صفر شود و نیز معادله $\langle(\nabla_X R)_x(X,Z)Y,Z\rangle = 0$ وقتی برقرار باشد که $\{X,Y,Z\}$ یک سه تایی متعامد در M_x باشد بطوریکه $R_x(X,Y)Z = 0$، آنگاه $(\nabla R)_x = 0$.

اثبات: لم ۱۰ مرجع [۲۰] .

قضیه۱۵-۲ [۲۰]: فرض کنید (M,g) خمینه ریمانی باشد بطوریکه W، تانسور ویل نظیر صفر شود(در حالت خاص فرض کنید $\dim M = 3$). اگر برای بعضی از مقادیر $r > 0$، کلاف کروی مماسی $(T_rM,\tilde{g})$ فضایی با انحنای مقطعی نامنفی باشد آنگاه (M,g) موضعاً متقارن است.

اثبات: فرض کنید (M,g) موضعاً متقارن نباشد، آنگاه در بعضی نقاط $x\epsilon M$ داریم $(\nabla R)_x \neq 0$. با توجه به لم ۱۴-۲ سه تایی متعامد $\{Z_1,Z_2,Z_3\}$ در M_x وجود دارد بطوریکه $\langle(\nabla_{Z_1}R)_x(Z_1,Z_2)Z_2,Z_3\rangle > 0$ و همزمان داریم $R_x(Z_1,Z_2)Z_3 = 0$، آنگاه با طی روند اثبات قضیه ۵-۱ ، برای هر $r > 0$ یک دو- صفحه مماس از T_rM با انحنای مقطعی منفی یافت می شود که تناقض است.////

از این قضیه استنتاج زیر را داریم:

نتیجه۱۶-۲ [۲۰]: فرض کنید (M,g) خمینه ریمانی $n-$ بعدی باشد بطوریکه تانسور ویل نظیر صفر شود(بخصوص فرض کنید $\dim M = 3$)، آنگاه برای هر شعاع به اندازه کافی کوچک $r > 0$، کلاف کروی مماسی $(T_rM,\tilde{g})$ فضایی با انحنای مقطعی نامنفی است اگر و فقط اگر (M,g) نسبت به یکی از فضاهای زیر موضعاً متقارن باشد:

$\mathbb{R}^n$, $S^n(c)$ یا $S^{n-1}(c)\times\mathbb{R}^1$

که $\mathbb{R}^n$ فضای اقلیدسی $n-$ بعدی است و $S^n(c)$ $n-$ کره به شعاع $\frac{1}{\sqrt{c}}$ است.

اثبات: اگر $(T_rM,\tilde{g})$، برای هر شعاع به اندازه کافی کوچک $r>۰$، فضایی با انحنای مقطعی نامنفی باشد آنگاه با توجه به قضیه ۱۵-۲، (M,g) موضعاً متقارن است و بنابراین موضعاً ایزومتر با فضایی متقارن که کلاً همگن است می باشد. بنابراین برای $n>۳$ نتیجه حاصل است[۲۶]. برای $n=۳$ تنها فضاهای متقارن همبند ساده با انحنای مقطعی نامنفی $\mathbb{R}^۳$، $S^۳(c)$ و $S^۲(c)\times\mathbb{R}^۱$ هستند. طرف دیگر قضیه نیز با توجه به قضیه ۲-۲ برقرار است.////

۳-انحنای ریچی

با توجه به قضیه ۹-۲ یک کلاف کروی مماسی مجهز به متر ساساکی به سختی می تواند دارای انحنای مقطعی مثبت باشد. در این بخش می بینیم که وضعیت برای انحنای ریچی متفاوت است.

گزاره ۱۷-۳ [۱۸]: $\widetilde{Ric}$ تانسو ریچی $(T_rM,\tilde{g})$ در هر نقطه ثابت $(x,u)\epsilon T_rM$ به صورت زیر به دست می آید:

$$\widetilde{Ric}_{(x,u)}(X^h+Y^t,X^h+Y^t)=Ric_x(X,X)+r\big((\nabla_X Ric)_x(Y,X)-(\nabla_Y Ric)_x(\hat{u},X)\big)+$$
$$r^۲\left[\tfrac{۱}{۴}\textstyle\sum_i\|R_x(\hat{u},Y)E_i\|^۲-\tfrac{۱}{۲}\sum_i\|R_x(\hat{u},E_i)X\|^۲\right]+\frac{n-۲}{r^۲}\|Y\|^۲ \qquad (۱-۳)$$

بازای هر $X\epsilon M_x$ و هر $Y\epsilon M_x$ عمود بر u بطوریکه $\tilde{g}_{(x,u)}(X^h+Y^t,X^h+Y^t)=۱$ و Ric تانسور ریچی (M,g) است و $\hat{u}=\frac{u}{r}$.

قضیه ۱۸-۳ [۱۸]: فرض کنید (M,g) خمینه ریمانی n- بعدی فشرده با انحنای ریچی مثبت و $n\geq ۳$ باشد، آنگاه برای عدد به اندازه کافی کوچک و مثبت r، کلاف کروی مماسی $(T_rM,\tilde{g})$ فضایی باانحنای ریچی مثبت است.

اثبات: ابتدا دقت کنید که ضرایب r و $r^۲$ در فرمول(۱-۳) کراندار هستند، سپس بررسی کنید که برای عدد به اندازه کافی کوچک و مثبتr، $Ric(X,X)+\frac{n-۲}{r^۲}\|Y\|^۲$ مثبت است.////

تذکر این نکته ارزشمند است که نتیجه دقیق و خاصی که به دست آورده ایم بسیار با مقاله مرجع [۲۳] و مقاله مرجع [۲۵] مرتبط است که در آن مقالات چند نتیجه وجودی کلی برای نشاندن های ریمانی (Riemannian Submersions) اثبات شده است.

۴- انحنای عددی

انحنای عددی کلاف کروی مماسی $(T_rM,\tilde{g})$ با شعاع ثابت ولی دلخواه r از ظرافت و جالبی خاصی برخوردار است. به این معنی که در مرجع[۱۸] دیده ایم که، تحت بعضی شرایط اضافه تر برای مقادیر کوچک شعاع r مقدار آن مثبت و برای مقادیر بزرگ شعاع r مقدار آن منفی می شود. ابتدا گزاره زیررا که تعمیمی برای شعاع دلخواه فرمول داده شده توسط وانهک (L.Vanhecke) و بواکس (E.Boeckx) در مرجع [۱۰] می باشد بیان می کنیم:

گزاره ۱۹-۴ [۱۸]: انحنای عددی $\widetilde{Sc}(\tilde{g})$ از $(T_rM,\tilde{g})$ در هر نقطه ثابت $(x,u)\epsilon T_rM$ به صورت زیر محاسبه می شود:

$$\widetilde{Sc}(\tilde{g})_{(x,u)}=\frac{(n-۱)(n-۲)}{r^۲}+Sc(g)_x-\tfrac{۱}{۴}r^۲\xi_x(\hat{u},\hat{u}) \qquad (۱-۴)$$

که $\hat{u}=\frac{u}{r}$ و $Sc(g)$ انحنای عددی (M,g) است و ξ میدان تانسوری روی M است که به صورت زیر داده می شود:

$$\xi(X,Y)=\sum_{i,j}\langle R(X,E_i)E_j\,,R(Y,E_i)E_j\rangle$$

برای همه بردارهای X,Y روی M و هر چندوجهی (موضعاً) متعامد $\{E_۱,E_۲,\dots,E_n\}$ روی M.

این نکته را باید متذکر شویم که فرمول (۱-۴) را می توان به نشاندن ریمانی با تارهای کلاً ژئودزیک تعمیم دادکه متر فضای کلی مطابق آنچه که معروف به تغییرات کانونی (canonical variation) است می باشد(مرجع [۳و گزاره ۷۰-۹] را ببینید). در حالت مورد نظر ما تغییرات کانونی مطابق تغییر شعاع ثابت $r>۰$ است که از مقدار اولیه $r=۱$ شروع می شود.

قضیه ۲۰-۴ [۱۸]: فرض کنید (M,g) خمینه ریمانی $n-$ بعدی با انحنای مقطعی کراندار(یا در حالت خاص فرض کنید (M,g) فشرده باشد) و $n \geq ۳$، آنگاه برای هر عدد به اندازه کافی کوچک r،کلاف کروی مماسی $(T_rM, \tilde{g})$ فضایی با انحنای عدی مثبت است.

اثبات: ابتدا بررسی کنید که انحنای عددی $Sc(g)$ و تابع $\xi_x(\hat{u}, \hat{u})$ روی M کراندار هستند. نتیجه از گزاره ۱۹-۴ حاصل می شود.////

در اینجا مفاهیمی را که در زیر نیاز داریم یادآوری می کنیم. خمینه ریمانی (M,g) را $\delta-$ پینچ (pinched) گوئیم اگر اعداد مثبت $\delta \leq ۱$ و A موجود باشند به طوریکه نامساوی $A\delta \leq K \leq A$ برای K، انحنای مقطعی آن برقرار باشد.اندیس پوچی در نقطه $x\epsilon M$ عبارتست از بعد زیرفضای $\{X\epsilon M_x: R_x(X,Y) = ۰; \forall\, Y\epsilon M_x\}$ (برای مثال مرجع [۱۶] را ببینید).

قضیه ۲۱-۴ [۱۸]: فرض کنید (M,g) یک خمینه ریمانی $\delta-$ پینچ $n-$ بعدی باشد (یا به صورت دیگر، فرض کنید (M,g) فشرده بوده طوری که اندیس پوچی آن در هر نقطه صفر باشد) و $n \geq ۲$، آنگاه برای هر عدد به اندازه کافی بزرگ و مثبت r کلاف کروی مماسی $(T_rM, \tilde{g})$ فضایی با انحنای عددی منفی است.

اثبات: ابتدا فرض کنید (M,g) $\delta-$ پینچ باشد، لذا انحنای عددی $Sc(g)$ روی M کراندار است و $\xi_x(\hat{u}, \hat{u})$ روی M برای هر $(x,u)\epsilon T_rM$ نامنفی است که $\hat{u} = \frac{u}{r}$. کافیست ثابت کنیم برای هر $(x,u)\epsilon T_rM$ و برای بعضی مقادیر $\acute{\delta} > ۰$ که از r مستقلند داریم $\xi_x(\hat{u}, \hat{u}) > \acute{\delta}$. اما اگر پایه متعامد $\{E_۱, E_۲, \ldots, E_n\}$ را که $E_n = \hat{u}$ انتخاب کنیم داریم:

$$\xi_x(\hat{u}, \hat{u}) = \sum_{i,j} \|R_x(E_n, E_i)E_j\|^۲$$

$$\geq \sum_{i=۱}^{n-۱} \|R_x(E_n, E_i)E_i\|^۲ \geq \sum_{i=۱}^{n-۱} (K_x(E_n \wedge E_i))^۲ \geq \quad (n-۱)A^۲\delta^۲$$

و لذا از (۱-۴) نتیجه حاصل می شود. حال به صورت دیگر، اگر (M,g) فشرده بوده به طوریکه اندیس پوچی آن در هر نقطه صفر باشد آنگاه ابتدا می بینیم که $Sc(g)$ روی M کراندار بوده و $\xi_x(\hat{u}, \hat{u})$ غیر صفر است و بنابراین برای هر $(x,u)\epsilon T_rM$ مثبت است. چون T_rM فشرده است برای بعضی مقادیر مثبت $\acute{\delta}$ که مستقل از r است دوباره داریم $\xi_x(\hat{u}, \hat{u}) > \acute{\delta}$ .////

منابع و مراجع

۱. Abbassi, M. T. K. Calvaruso, G., g-natural contact metrics on unit tangent sphere bundles, Monatsh Math. 151 (2) (2007),89-109.

۲. Adams, J. F., On the non-existence of elements of Hopf invariant one, Ann. Math. ۷۲(۱۹۶۰), ۲۰-۱۰۴.

۳. Besse, A. L., Einstein Manifolds, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, ۱۹۸۷.

۴. Blar, D., When is the tangent sphere bundle locally symmetric?, Geom. Topol., World Sci. Publishing, Singapore (1989),15-30.

۵. Boeckx, E., Vanhecke, L., Characteristic reflections on unit tangent sphere bundles, Houston J. Math. 23 (1997), 427-448.

۶. Boeckx, E., Vanhecke, L., Geometry of the tangent sphere bundle, Proceedings of the Workshop on Recent Topics in Differential Geometry (Cordero, L. A., Garcia Rio, E., eds.), Santiago de Compostela, 1997, pp, 5-17.

۷. Boeckx, E., Vanhecke, L., Curvature homogeneous unit tangent sphere bundles, Publ. Math. Debrecen 35 (1998), 389-413.

۸. Boeckx, E., Vanhecke, L., Unit tangent sphere bundles and two-point homogeneous spaces, Period. Math. Hungar. 36 (1998), 79-95.

۹. Boeckx, E., Vanhecke, L., Harmonic and minimal vector fields on tangent and unit tangent bundles, Differential Geom. Appl. 13 (2000), 77-93.

۱۰. Boeckx, E., Vanhecke, L., Unit tangent sphere bundles with constant scalar curvature,

۱۱. Borisenko A. A. Yampolski A. L., On the Sasaki metric of the tangent and the normal

۱۲. Borisenko A. A.calar curvature of Yampolski A. L., The sectional curvature of the Sasaki metric of $\mathbf{T_r M^n}$, Ukrain Geom. Sb. 30 (1987), 10-17.

۱۳. Borisenko A. A. Yampolski A. L., Riamannian geometry of fiber bundles, Russian Math. Surveys 46 (6) (1991),55-106.

۱۴. Calvaruso G., Contact metric geometry of the unit tangent sphere bundles, Complex, Contact and symmetric manifolds. In honor of L. Vanhecke (Kowalski O. et al ed.), Vol. 234, Progress in Mathematics, 2005, pp. 41-57.

۱۵. Ivanov, S., Petrova, I., Riemannian manifolds in which the skew-symmetric curvature operator has pointwise constant eigenvalues, Geom. Dedicata 70 (1998), 269-282.

۱۶. Kobayashi S., Nomizu K., Foundations of differential geometry II, Interscience Publishers, New York-London-Sydney, 1969.

۱۷. Kowalski. O., Sekizawa M., Geometry of tangent sphere bundles with arbitrary constant radius, Proceedings of the Symposium Contemporary Mathematics (Bokan N. ed),Facultyof Mathemetics, University of Belgrade, 2000, pp. 219-228.

۱۸. Kowalski. O., Sekizawa M., On tangent sphere bundles with small or large constant radius, Ann. Global Anal. Geom. 18 (2000), 207-219.

۱۹. Kowalski. O., Sekizawa M., On the tangent sphere bundles with arbitrary constant radius, Bull. Greek Math. Soc. 44 (2000), 17-30.

۲۰. Kowalski. O., Sekizawa M., On Riemannian manifolds whose tangent sphere bundles can have nonnegative sectional curvature, Univ. Jagellon. Acta Math. 40 (2002), 245-۲۵۶.

۲۱. Kowalski. O., Sekizawa M., Vlasek, Z., Can tangent sphere bundles over Riemannian manifolds have strictly positive sectional curvature?, Global Differential Geometry:

The Mathematical Legacy of Alfred Gray (Fernandez, M. and Wolf J. A., eds.),Contemp. Math. 288 (2001), 110-118.

۲۲. Nagy, P. T., Geodesics on the tangent sphere bundles of a Riemannian manifolds, Geom. Dedicata 7 (1978), 233-243.

۲۳. Nash, J., Positive Ricci Curvature on Fiber Bundles, J. Differential Geom., 14 (1979), ۲۴۱-۲۵۴.

۲۴. Podesta, F., Isometries of tangent sphere bundles, Boll. Un. Math. Ital. A(7) 5(1991), ۲۰۷-۲۱۴.

۲۵. Poor, W., Some exotic spheres with positive Ricci curvature, Math. Ann. 216 (1975), ۲۴۵-۲۵۲.

۲۶. Yakagi, H., Conformally flat Riemannian manifolds admitting a transitive group of isometries, Tohoku Math. J. 27 (1975), 103-110.

۲۷. Wolf J. A., Eliptic spaces in Grassmann manifolds, Illinois J. Math. 7 (1963), 447-462.

۲۸. Yampolski, A. L., On the geometry of tangent sphere bundles of Riemannian manifolds, Ukrain. Geom. Sb 24 (1981), 129-132, in Russian.

۲۹. Yampolski, A. L., On Sasaki metric of tangent and normal bundles, Ph.D. Thesis, Odessa, 1986, (Russian).