فصلنامه رویکردهای نوین در تحقیقات علوم پایه، فنی و مهندسی
سال ششم، شماره ۲۲، پاییز ۱۴۰۲
ISSN: ۲٦٤٥-٥٤٣٩
www.jonarbset.ir

گراف های مقسوم علیه صفر به همراه گراف های خطی و گراف های همسایگی مشترک آن

امیرمحمد مومنی کوهستانی[۱]

[۱] کارشناسی ارشد ریاضی محض گرایش جبر، دانشگاه مازندران، بابلسر، ایران

چکیده

فرض می‌کنیم R یک حلقه جابجایی و $Z = Z(R)$ مجموعه همه مقسوم علیه های صفر نابدیهی آن باشد. فرض کنید G یک گراف و LG گراف خطی و $ConG$ گراف همسایگی مشترک آن باشند. گراف مقسوم علیه صفر از حلقه R، گرافی است که رئوس آن عناصر Z و دو راس متمایز $x,y \in Z$ به هم متصل اند اگر و فقط اگر $x.y = 0$ در این صورت این گراف را با $\Gamma = \Gamma(Z,E)$ نشان می دهیم. مجموعه Z را رئوس گراف و $|Z| = p$ را مرتبه گراف Γ و مجموعه E را یالهای گراف و $|E| = q$ را اندازه گراف Γ گویند. دراین مقاله گراف مقسوم علیه صفر از حلقه $\mathbb{Z}_n$ و همچنین گراف خطی و گراف همسایگی مشترک آن را مورد مطالعه قرار می‌دهیم و قضایای در این مقاله به اثبات می رسانیم که باکمک ان می توان همسایگی و درجه رئوس گراف خطی و گراف همسایگی مشترک انرا مشخص کنیم و ارتباط ان با گراف مقسوم علیه صفر را مورد بررسی قرار می دهیم.

واژه‌های کلیدی: حلقه های جابجایی- مقسوم علیه صفر- گراف مقسوم علیه صفر- گراف خطی- گراف همسایگی مشترک.

۱- مقدمه و تعاریف اولیه

الف) در این مقاله منظوراز گراف $G = G(V, E)$، گرافی است ساده و بدون جهت، که در آن $V = V(G)$ نشان دهنده مجموعه رئوس و $E = E(G)$ نشان دهنده مجموعه یالهای G است. برای تمامی اصطلاحات و تعاریفی که در این مقاله ذکر نشده است خواننده علاقمند می‌تواند به منابع [۱،۲،۱۲،۱۳] مراجعه نمایند.

ب) درجه هر راس $v \in V$ که معمولا با $\deg v = deg_G v$ نمایش می‌دهیم برابر با $|N_G v|$ می باشد.

ج) گراف خطی $G = G(V, E)$ را که با $LG = LG(V', E')$ نشان می دهیم گرافی است که رئوس آن متناظر با یالهای گراف G می‌باشد و دو راس از LG متصل هستند اگر و فقط اگر متناظر با یالهای در گراف G متصل باشند یعنی $V'(LG) = E(G)$
$E'(LG) = \{e_i, i \in 1,2, \dots, q | e_i \cap e_j \neq \emptyset, i \neq j\}$

(q تعداد یالهای G می‌باشد.)

د)گراف همسایگی مشترک $G(V, E)$، که به اختصار آن را با $conG(V', E')$ نشان می‌دهیم، گرافی است که مجموعه راس آن $V'(conG) = V(G)$ و دو راس u, v از $con(G)$ متصل هستند اگر و فقط اگر $N_G v \cap N_G u \neq \emptyset$ به‌عبارت دیگر برای هر

$\{u, v\} = uv \in E'(conG), u, v \in V(G) \Leftrightarrow N_\Gamma v \cap N_\Gamma u \neq \emptyset$

در مقاله [2,6] بعضی از خواص پایه ای مربوط به $conG$ را ثابت کردند.

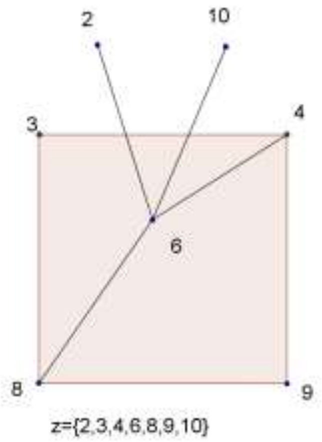
تمام حلقه ای که در این مقاله اماده حلقه ای جابجایی و متناهی اند

اگر R یک حلقه، و $a \in R$، مجموعه تمام $x \in R$ به قسمی که $a.x = 0$ را صفر ساز عنصر a حلقه گویند و آنرا با $Ann(a)$ نشان می‌دهیم.

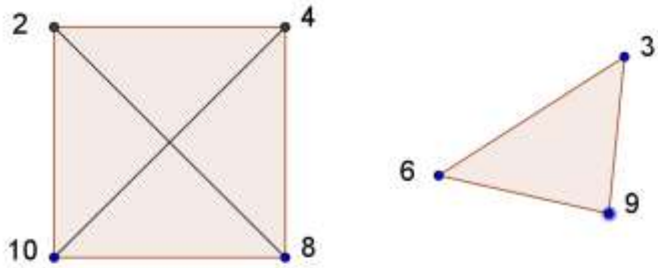
نظریه گراف مقسوم علیه صفر از یک حلقه جابجایی توسط Beck (بک) در مقاله [5] معرفی شده است، او در زمینه رنگ ها علاقه زیادی دارد. گراف مقسوم علیه صفر از یک حلقه جابجایی توسط افراد مختلفی مورد مطالعه قرار گرفتند که برای اطلاعات بیشتر می‌توان به مقالات [1,3,6,10] مراجعه کرد. برای اصطلاحات علمی نظریه گراف می‌توان به مقاله [8] و برای مفاهیم پایه ای نظریه حلقه ها جابجایی به مقاله [9] مراجعه نمود.

تعریف ۱-۱ گراف مقسوم علیه صفر از یک حلقه R را که با $\Gamma = \Gamma(Z, E)$ نشان می‌دهیم گرافی است که مجموعه رئوس آن $Z = Z(R)$ و مجموعه یالهای آن E می‌باشد و برای هر $u, v \in Z, uv \in E$ اگر و فقط اگر $uv = 0$.

مثال ۱- ۲ حلقه $R = \mathbb{Z}_{12}$ در نظر می‌گیریم در اینصورت گراف های $\Gamma(Z, E)$ و $Con\Gamma(V_1, E_1)$ و $L\Gamma(V_2, E_2)$ به ترکیب در شکل های ۱ و ۲ و ۳ آورده شده است.

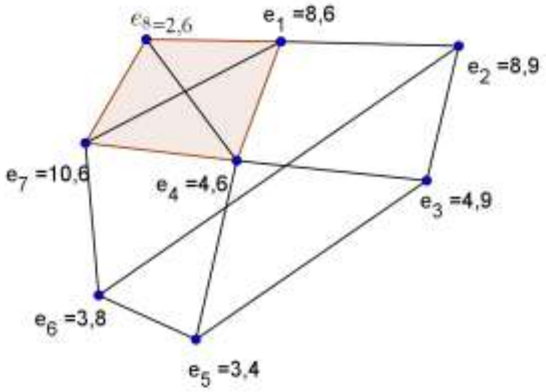


شکل ۱



شکل 2

$Con\Gamma(V_1, E_1)$



$\text{L}\Gamma(\ V_2, E_2)$

شکل ۳

در یک گراف مقسوم علیه صفر حلقه R، $\Gamma = \Gamma(Z, E)$، برای هر $a \in Z$ داریم:

$$N_\Gamma a = \{x \in Z | \{x,a\} \in Z\}$$
$$= \{x \in Z | a.x = 0\}$$
$$= Ann(a) - \{0,a\}$$

گزاره۱– ۳ فرض کنید $i = 1,2\Gamma_i = \Gamma(V_i,E_i)$ گراف های مقسوم علیه صفر حلقه های R_1 و R_2 باشند انگاه سه گزاره معادل اند

الف) $\Gamma_1 \cong \Gamma_2$

ب) $con\Gamma_1 \cong con\Gamma_2$

ج) $L\Gamma_1 \cong L\Gamma_2$

۲– نتایج اصلی

در این قسمت مقاله حلقه R، $R = \mathbb{Z}_n$ که در آن $n \neq 1$ و عدد اول نمی‌باشد در نظر می‌گیریم.

لم ۱–۲ فرض کنید $\Gamma = \Gamma(Z,E)$ گراف مقسوم علیه حلقه $\mathbb{Z}_n$ می‌باشد، برای هر $a \in Z$،

الف) $deg_\Gamma \mathrm{a} =$ (a,n) - 1 $\quad a^2 \not\equiv 0 \quad n$ پیمانه

ب) $deg_\Gamma \mathrm{a} =$ (a,n) - 2 $\quad a^2 \equiv 0 \quad n$ پیمانه

که در آن (a,n) بزرگترین مقسوم علیه مشترک n و a می باشد.

اثبات با توجه به لم ۲-۱ برای هر $a \in Z$

$$N_\Gamma a = Ann(a) - \{0,a\}$$
$$\Rightarrow deg_\Gamma \mathrm{a} = |N_\Gamma a| = |Ann(a) - \{0,a\}|$$

$$= \begin{cases} |Ann(a)| - 1 & a^2 \not\equiv 0 \quad n \text{ پیمانه} \\ |Ann(a)| - 2 & a^2 \equiv 0 \quad n \text{ پیمانه} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} (a,n) - 1 & a^2 \not\equiv 0 \quad n \text{ پیمانه} \\ (a,n) - 2 & a^2 \equiv 0 \quad n \text{ پیمانه} \end{cases}$$

با توجه به **شکل ۱** گراف مقسوم علیه حلقه $\mathbb{Z}_{12}$ مشاهده می‌کنیم.

$deg_\Gamma 10$= (10,12)-1=1 $\quad 10^2 \not\equiv 0 \quad 12$ پیمانه

$deg_\Gamma 6$= (6,12)-2=4 $\quad 6^2 \equiv 0 \quad 12$ پیمانه

قضیه ۲– ۲ فرض کنید $f(n) = \sum_{a=1}^{n-1}(a,n)$ و $f(1) = 0$ باشد آنگاه

الف) p عدد اول و $\alpha \in \{0,1,\dots\}$ $\qquad f(p^\alpha) = \alpha p^{\alpha-1}(p-1)$

ب) هرگاه $(m,n) = 1$ باشد آنگاه،

$$f(m,n) = f(m).f(n) + nf(m) + mf(n)$$

اثبات(الف) واضح است.

اثبات(ب) چون $(n,m) = 1$ می‌باشد در این صورت برای $a \in \mathbb{N}$ داریم

۱- $$(a,m.n) = (a,m).(a,\mathrm{n})$$

۲- برای هر $a,r,k \in \{0,1,\dots\}$ داریم

$$(r+ka,a) = (r,a)$$

با یک محاسبه ساده و کمی طولانی می‌توان نشان داد که

$$f(m,n) = f(m).f(n) + nf(m) + mf(n)$$

مثال ۲-۳ :

$$f(12) = f(2^2.3) = f(2^2)f(3) + 2^2f(3) + 3f(2^2)$$

بنا به (الف)

$$f(3) = 1.3^0(3-1) = 2$$

$$f(2^2) = 2.2^1(2-1) = 4$$

بنابراین

$$f(12) = 4.2 + 4.2 + 3.4 = 28$$

نتیجه ۲-۴ هرگاه p,q اعداد اول و $\alpha,\beta \in \{0,1,\dots\}$ باشد آنگاه

$$f\left(p^{\alpha}q^{\beta}\right) = \alpha\beta p^{\alpha-1}q^{\beta-1}(p-1)(q-1) + \beta p^{\alpha}q^{\beta-1}(q-1) + \alpha q^{\beta}p^{\alpha-1}(p-1)$$

مثال ۲-۵ محاسبه

$$f(200) = f(2^3.5^2)$$

$$= 3.2.2^2.5^1(2-1)(5-1) + 2.2^3.5(4) + 3.5^2.2^6(2-1) = 24.20 + 34.10 + 300$$
$$= 1100$$

قضیه ۲-۶ فرض کنید $\Gamma(Z,E)$ گراف مقسوم علیه صفر حلقه $\mathbb{Z}_n$ باشد ($n \neq 1$ و n عدد اول نمی باشد.) و p مرتبه و q اندازه گراف $\Gamma(Z,E)$ باشد. آنگاه

الف)

$$p = n - 1 - \phi(n)$$

که ϕ تابع فی اویلر

ب)

$$q = \frac{1}{2}[f(n) + 1 - n - r]$$

که در آن

$$r = |\{a \in Z | a^2 \equiv^n 0\}|$$

اثبات (الف) واضح است.

اثبات (ب): فرض می کنیم

$$A = \left\{a \in Z \middle| a^2 \not\equiv 0 \quad \text{پیمانه } n\right\}$$

$$B = \left\{a \in Z \middle| a^2 \equiv 0 \quad \text{پیمانه } n\right\}$$

بدیهی است

$$|A| + |B| = |Z| = p = n - 1 - \phi(n)$$

در هر گراف داریم،

$$2q = \sum_{a \in Z} deg_\Gamma a = \sum_{a \in A} deg_\Gamma a + \sum_{a \in B} deg_\Gamma a$$

بنا بر لم ۲-۲ داریم

$$= \sum_{a \in A}[(a,n) - 1] + \sum_{a \in B}[(a,n) - 2]$$

$$= \sum_{a \in Z}(a,n) - |A| - 2|B|$$

$$= \sum_{a \in Z}(a,n) + \sum_{a \in \mathbb{Z}_n^* - Z}(a,n) - \sum_{a \in \mathbb{Z}_n^* - Z}(a,n) - |A| - 2|B|$$

$$= \sum_{a=1}^{n-1}(a,n) - \phi(n) - (|A| + |B|) - |B|$$

$$= \sum_{a=1}^{n-1}(a,n) - \phi(n) - (n - 1 - \phi(n)) - r$$

$= f(n) + 1 - n - r$

$\Rightarrow q = \frac{1}{2}[f(n) + 1 - n - r]$

که در آن: $\mathbb{Z}_n^* = \mathbb{Z}_n - \{0\}$ و $f(1) = 0$ و $f(n) = \sum_{a=1}^{n-1}(a,n)$

نتیجه ۲-۷ هرگاه $\mathbb{Z}_n$ حلقه ای که در آن برای هر $a \in Z$ (پیمانه n $a^2 \not\equiv 0$) باشد آنگاه،

$$q = \frac{1}{2}[f(n) + 1 - n]$$

مثال ۲-۸ در حلقه $\mathbb{Z}_{12}$، تعداد راس گراف $p = 12 - 1 - \phi(12) = 7$ وتعداد یال گراف $\Gamma(Z, E)$،

$$q = [f(12) + 1 - 12 - 1] = \frac{1}{2}[28 - 12] = 8$$

واضح $r = 1$ می‌باشد.

تذکر ۲-۹ فرض کنید $\Gamma = \Gamma(Z, E)$، گراف مقسوم علیه صفر باشد، آنگاه برای هر $v \in Z$ داریم:

$N_{\Gamma con}v = \{u \in Z | uv \in E(Con\Gamma)\}$

$= \{u \in Z | N_\Gamma u \cap N_\Gamma v \neq \emptyset\}$

$= \{u \in Z | (Ann(u) - \{0, u\} \cap (Ann(v) - \{0, v\} \neq \emptyset)\}$

$= \{u \in Z | (Ann(u) \cap Ann(v) - \{0, u, v\}) \neq \emptyset)\}$

یعنی $x \in Ann(u) \cap Ann(v) - \{0, u, v\} \neq \emptyset$

$\Rightarrow x \neq 0, u, v$

و $u.x = v.x = 0 \Rightarrow u \in Ann(x)$

برای هر $x \in Ann(v), x \neq, u, v$

بنابراین $N_{\Gamma con}v = \bigcup_{u_i \in N_\Gamma v} N_\Gamma u_i - \{v\}$

در مثال ۱-۲ داریم

$$N_{\Gamma con}8 = \bigcup_{u_i \in N_\Gamma 8} N_\Gamma u_i - \{8\}$$

$$= \{8,4\} \cup \{8,4\} \cup \{2,10,8,4\} - \{8\}$$

$$= \{2,4,10\}$$

تذکر ۱۰-۲ به آسانی می‌توان نشان داد اگر p و q اعداد اول متمایز باشند و $\Gamma = \Gamma(Z,E)$ گرافی مقسوم علیه صفر حلقه $\mathbb{Z}_{pq}$ باشد، در این صورت:

الف) $\Gamma = N_{p-1} + N_{q-1} = K_{p-1,q-1}$

ب) $Con\Gamma = K_{p-1} \cup K_{q-1}$

بخصوص در حلقه $\mathbb{Z}_{2p}$ و p عدد اول باشند $\Gamma = \Gamma(Z,E)$ گراف مقسوم صفر حلقه $\mathbb{Z}_{2p}$ باشد.

الف) ستاره گراف $\Gamma = N_1 + N_{p-1}$

ب) $Con\Gamma = K_1 \cup K_{p-1}$

قضیه ۲-۱۱ فرض کنید $\Gamma = \Gamma(Z,E)$ گراف مقسوم علیه صفر حلقه R (جابجایی و متناهی) و p و q به ترتیب، مرتبه و اندازه گراف Γ باشند. آنگاه برای هر $v \in Z$ داریم

الف) $$deg_{con\Gamma} v + deg_\Gamma v = \sum_{u_i \in N_\Gamma^v} deg_\Gamma u_i$$

ب) برای هر $v, u \in Z$

$$deg_\Gamma u + deg_\Gamma w > p$$

آنگاه

$$Con\Gamma = K_p$$

اثبات الف :

$$v \in Z, N_{con\Gamma} v = \bigcup_{u_i \in N_\Gamma^v} N_\Gamma u_i - \{v\}$$

$$\Rightarrow deg_{con\Gamma} v = |N_{Con\Gamma)}^v|$$

$$= |\bigcup_{u_i \in N_\Gamma^v} N_\Gamma u_i - \{v\}| = \sum_{u_i \in N_\Gamma^v} |N_\Gamma u_i - \{v\}|$$

$$= \sum_{u_i \in N_\Gamma^v} |N_\Gamma u_i| - 1|$$

$$\Rightarrow deg_{con\Gamma} v = \sum_{u_i \in N_\Gamma^v} deg_\Gamma u_i - deg_\Gamma v$$

$$\Rightarrow deg_{con\Gamma} v + deg_\Gamma v = \sum_{u_i \in N_\Gamma^v} deg_\Gamma u_i$$

اثبات ب. کافی است نشان دهیم برای هر $u, v \in Z$ ، $N_\Gamma u \cap N_\Gamma v \neq \emptyset$

فرض کنیم $u, v \in Z$ موجود باشند $N_\Gamma u \cap N_\Gamma v = \emptyset$

با توجه به تعریف همسایگی راس داریم:

$$p \geq |N_\Gamma u \cup N_\Gamma v| = N_\Gamma u + N_\Gamma v$$

$$= deg_\Gamma^u + deg_\Gamma^v > p$$

یک تناقض است، پس برای هر $u, v \in Z$،

$$N_\Gamma u \cap N_\Gamma v \neq \emptyset \Rightarrow uv \in E(con\Gamma)$$

بنابراین

$$Con\Gamma = K_p$$

قضیه ۲-۱۲ فرض کنید $\Gamma = \Gamma(Z,E)$ گراف مقسوم علیه صفر حلقه $\mathbb{Z}_n$ ($n \neq 1$ و n عدد اول نمی باشد) و دوری از مرتبه چهار نداشته باشد و p و q به ترتیب مرتبه و اندازه گراف Γ و p' مرتبه و q' اندازه گراف $Con\Gamma$ باشند. آنگا ه

الف)
$$p' = n - 1 - \emptyset(n) \ = p$$

ب)
$$q' = \frac{1}{2}[\sum_{v_i \in Z} deg^2(v_i) - 2q]$$

اثبات الف) بدیهی است

ب) برای هر $u, w \in N_\Gamma(v)$ داریم، نشان می دهیم

$$N_\Gamma u \cap N_\Gamma w = \{v\}$$

فرض کنیم

$$a \in N_\Gamma u \cap N_\Gamma w$$

موجود باشد و $a \neq v$، در اینصورت $au, vu, aw, vw \in E(\Gamma)$ در نتیجه گراف Γ دوری از مرتبه چهار دارد که تناقض است.

بنا به قضیه ۲-۱۱ برای هر $v_i \in Z$ داریم:

$$deg_{con\Gamma} v_i + deg_\Gamma v_i = \sum_{u_j \in N_\Gamma v_i} deg_\Gamma u_j$$

$$\Rightarrow \sum_{v_i \in Z} deg_{con\Gamma} v_i + \sum_{v_i \in Z} deg_\Gamma v_i$$

$$= \sum_{v_i \in Z} \sum_{u_j \in N_\Gamma v_i} deg_\Gamma u_j$$

$$\Rightarrow 2q' + 2q = \sum_{v_i \in Z} deg_\Gamma^2 v_i$$

$$\Rightarrow q' = \frac{1}{2}[\sum_{v_i \in Z} deg_\Gamma^2 v_i - 2q]$$

تذکر۲-۱۳ فرض کنید $\Gamma = \Gamma(Z,E)$ گراف مقسوم علیه صفر حلقه $\mathbb{Z}_n$ باشد. در این صورت برای هر $e = \{u,v\} \in E(\Gamma)$

$$deg_{L\Gamma} e = N_{L\Gamma}\{u,v\}$$

$$= \{\{u,x\}|x \in N_\Gamma u\} \cup \{\{v,y\}|y \in N_\Gamma v\}$$

$$= \{\{u,x\}\big|x \in N_\Gamma u\} \cup \{\{v,y\}\big|y \in N_\Gamma v\} - \{u,v\}$$

$$\Rightarrow deg_{L\Gamma} e = deg_\Gamma u + deg_\Gamma v - 2$$

قضیه ۲-۱۴ فرض کنید $\Gamma = \Gamma(Z,E)$ گراف مقسوم علیه صفر حلقه $\mathbb{Z}_n$ که ($n \neq 1$ و n عدد اول نمی باشد) دوری از مرتبه چهار نداشته باشد و p و q به ترتیب مرتبه و اندازه گراف Γ و فرض کنید

$L\Gamma = \Gamma'(V',E')$ گراف خطی و p' مرتبه و q' اندازه گراف $L\Gamma$ باشند. آنگاه،

الف)

$$p' = q = \frac{1}{2}[f(n) + 1 - n - r]$$

که در آن

$$r = |\{a \in Z|a^2 \equiv^n 0\}|$$

ب)

$$q' = \frac{1}{2}\left[\sum_{a_i \in Z}((a_i,n)^2 - (a_i,n)) - 5q + a - b\right]$$

$$a = Cardinal\left\{uv \in E(\Gamma)\middle|\mathrm{u} \not\equiv 0, \mathrm{v} \not\equiv 0 \ (\text{پیمانه } n)\right\}$$

$$b = Cardinal\left\{uv \in E(\Gamma)\middle|u^2 \equiv 0, v^2 \equiv 0 \ (\text{پیمانه } n)\ \right\}$$

اثبات: الف بدیهی است.

ب) فرض کنیم

$$A = \left\{e = uv \in E(\Gamma)\middle|u^2 \not\equiv 0, v^2 \not\equiv 0 \ \ (\text{پیمانه } n)\right\}$$

$$B = \left\{e = uv \in E(\Gamma)\middle|u^2 \equiv 0, v^2 \equiv 0 \ (\text{پیمانه } n)\ \right\}$$

$$C = \{e = uv \in E(\Gamma)\} - A - B$$

در این صورت برای هر $e = uv \in L\Gamma$ داریم،

$$deg_{L\Gamma}\, e = \begin{cases} (u,n) + (v,n) - 4 \,, e \in A \\ (u,n) + (v,n) - 6 \,, e \in B \\ (u,n) + (v,n) - 5 \,, e \in C \end{cases}$$

بنابراین

$$2q' = \sum_{e \in V(L(\Gamma))} deg_{L\Gamma}\, e$$

$$= \sum_{e \in A} deg_{L\Gamma} e + \sum_{e \in B} deg_{L\Gamma} e + \sum_{e \in C} deg_{L\Gamma}\, e$$

$$= \sum_{e=uv \in A} (u,n) + (v,n) - 4 + \sum_{e=uv \in B} (u,n) + (v,n) - 6 + \sum_{e=uv \in C} (u,n) + (v,n) - 5$$

$$= \sum_{e=uv \in V(L(\Gamma))} (u,n) + (v,n) - 4|A| - 6|B| - 5|C|$$

$$= \sum_{e=uv \in E(\Gamma)} (u,n) + (v,n) - 5(|A| + |B| + |C|) + |A| - |B|$$

$$= \sum_{a_i \in Z} deg_{L\Gamma}\, a_i . (a_i, n) - 5q + a - b$$

$$= \sum_{a_i \in Z} [(a_i, n)^2 - (a_i, n)] - 5q + a - b$$

$\square$

مثال ۲-۱۵ فرض کنید $\Gamma = \Gamma(Z, E)$ گراف مقسوم علیه صفر حلقه $\mathbb{Z}_{40}$ باشد. در این صورت

۱) $N_\Gamma 4 = \{10,20,30\}$

$deg_\Gamma 4 = (4,40) - 1 = 3 = |N_\Gamma 4|$

۲) $N_{con\Gamma}4 = \bigcup_{u_i \in N_\Gamma 4} N_\Gamma u_i - \{4\} = N_\Gamma 10 \cup N_\Gamma 20 \cup N_\Gamma 30 - \{4\}$

$= \{2,6,8, \ldots, 38\}$

$\Rightarrow deg_{con\Gamma} 4 = 18$

$e = \{4,10\} \in E(\Gamma) = V(LG)$

$N_{LG} e = \{\{4,x\} | x \in N_\Gamma 4\} \cup \{\{10,y\} | y \in N_\Gamma 10\} - \{4,10\}$

$= \{\{4,10\}, \{4,20\}, \{4,30\}, \{10,4\}, \{10,8\}, \ldots, \{10,36\}\} - \{4,10\}$

={{10,8},{10,12},{10,16},{10,20},{4,20},{10,24},{10,28},{4,30},{10,32},{10,36}}

$\Rightarrow deg_{L\Gamma} e = 10$

از طرفی

$deg_{L\Gamma}\{4,10\} = (4,40) + (10,40) - 4 = 10$

با توجه به گزاره ۱-۳ برای حلقه R یکریخت با $\mathbb{Z}_n$ ($n \neq 1$ و n عدد اول نمی باشد) و $\Gamma = \Gamma(Z,E)$ گراف با مقسوم علیه صفر حلقه R باشد، برای هر $v \in Z$ و $e \in E$ می‌توان $N_\Gamma v$ و $N_{con\Gamma} v$ و $N_{L\Gamma} e$ را مشخص نمود. یعنی $deg_\Gamma v$ و $deg_{con\Gamma} v$ و $deg_{L\Gamma} e$ قابل محاسبه می‌باشد.

منابع

[1] A. S. Bonifacio, R. R. Rosa, I. Gutman, N. M. M. de Abreu, Complete common neighborhood graphs ,Proceeding of Congreso latinoIberoamericano de Investiagaci on Operativa and Simposio brasileiro de pesquisa operacional (2012), 4026-4032

[2] A. Alwardi, B. Arsic, I. Gutman, N.D. Soner, The common neighborhood graph and its energy, Iranian J. Math. Sci. Inf., 7 (2012), 1-8.

[3] J. A. Bondy , U. S. R. Murty, Graphs Theory. Springer verlarge (2008).

[4] C. Godsil, G. Royale, Algebraic Graphs Theory. Springer verlarge (2008).

[5] D.F. Anderson, A.Frazier, A. Lauve, P.S. Livingston, The zero-divisior graph of a commutative ring. II, Ideal theoric methods in commutative algebra (Columbia, MO,1999), 61-72, Lecture Notes in pure and Appl. Math., 220, Dekker, New York, 2001.

[6] D.F. Anderson, P.S. Livingston, The zero-divisior graph of a commutative ring, J. Algebra, 217 (1999), 434-447.

[7] F.Buckley, F. Harary, Distance in Graphs, Addison-Wesley, Redwood,1990.

[8] F. Harary, Graphs Theory, Addison-Wesley, Reading,1969.

[9] I. Beck, coloring of commutative rings, J. Algebra, 116 (1988), 208-226.

[10] I. Kaplansky, Commutative Rings, University of Chicago Press, Chicago, 1974.

[11] S. Akbari, A. mohammadian, On the zero-divisor graph of a commutative ring, J. Algebra, 274 (2004), 847-855.

[12] S. P. Redmond, Structure in The zero-divisior graph of a non-commutative ring, Huston J. Math., 30(2002), 345-355.

[13] N. L. Biggs, Algebraic Graphs Theory (Second edition) cambrige mathematical Library (1993).